sciences-centreimpression

De:	no-reply@www.usherbrooke.ca
Envoyé:	16 juin 2015 12:49
À:	sciences-centreimpression
Objet:	COMMANDE EXAMENS
Pièces jointes:	IntraE15.pdf

TYPE-EXAMEN	INTRA
SIGLE-COURS	ROP 630
TITRE-COURS	Programmation non-linéaire
PROFESSEUR	Jean-Pierre Dussault
DATE-HEURE	jeudi 18 juin 13h30
AUTORISE-PAR	
NOMBRE-PAGES	5
NOMBRE-COPIE-PROF	6
IMPRESSION-QUESTIONNAIRE	Recto broché
NOMBRE-FEUILLES-BLANCHES	
NOMBRE-PAPIER-GRAPHIQUE	
NOMBRE-CAHIERS	
CONSENTEMENT-AGES	1
REMARQUES	
E-MAIL	
FIRST-NAME	
LAST-NAME	
NICK-NAME	
SPAMSHIELD	true

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE

ROP 630
Programmation non-linéaire
Examen périodique

Le jeudi 18 juin 2015 Professeur : Jean-Pierre Dussault
de 13 h 30 à 15 h 20

Notes :

- Trois feuilles manuscrites (recto–verso) sont permises.
- Calculatrice permise.
- La clarté et concision de vos réponses sont généreusement récompensées ! Une réponse ambigüe ou obscure est souvent incomprise et donc notée défavorablement.
- Justifiez toujours vos réponses. Votre démarche est plus importante que le chiffre final auquel vous aboutissez !
- L'examen comporte 4 questions et totalise 125 points. Il est tout de même noté sur 100, alors choisissez les questions qui vous paraissent les plus faciles. Si jamais vous obtenez plus de 100 points, l'excédent est perdu.

---

1. *[Généralités — $10 \times 2 = 20$ points]* De petites questions brèves, appelant des réponses brèves.
   (a) Est-ce qu'un minimum global est toujours un minimum local ? Si oui, pourquoi ? Sinon, donnez un contre exemple.
   (b) Est-il possible qu'un minimum global soit un maximum local ? Si oui, pourquoi ? Sinon, donnez un contre exemple.
   (c) Est-il possible qu'un minimum local strict soit un maximum local ? Si oui, donnez un exemple, sinon, justifiez.
   (d) Est-il possible qu'un minimum local ne satisfasse pas aux conditions nécessaires pour un minimum ? Si oui, donnez un exemple, sinon, justifiez.
   (e) Est-il possible qu'un minimum local satisfasse aux conditions suffisantes pour un maximum ? Si oui, donnez un exemple, sinon, justifiez.
   (f) Est-ce qu'un algorithme qui possède la propriété de convergence globale converge toujours vers un minimum global ?
   (g) Quelle est la différence entre une direction de descente et une direction suffisamment descendante ?
   (h) Qu'entend-on par méthode de Newton *modifiée* pour l'optimisation ? Pourquoi modifier la méthode de Newton puisqu'elle a fait ses preuves depuis des siècles ?
   (i) En quoi consiste le test d'arrêt "courbure_négative" de l'algorithme du gradient conjugué pour calculer une direction de Newton modifiée et à quoi sert-elle ?

(j) Combien d'itérations au plus l'algorithme du gradient conjugué linéaire nécessite-t-il pour résoudre un système $Qx = b$ où la matrice $Q \succ 0$ est symétrique 100×100 et $x, b \in \mathbb{R}^{100}$?

2. *[Optimisation générale* — $4 \times 5 = 20$ *points]*
Considérez les trois fonctions

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ h_2(x) &= e^{h_1(x)} \\ h_3(x) &= (h_1(x))^2 \end{aligned}$$

Pour chacune des 3 fonctions, répondez aux questions. Remarquons que $h_1(0) = h_1(\frac{3}{2}) = 0$.

(a) La fonction est-elle bornée inférieurement ? Si oui fournissez $h^* = \inf h(x)$ et indiquez si h atteint son inf en fournissant x^* tel que $h(x^*) = \min h(x)$. Si vous répondez qu'elle n'est pas bornée ou encore n'atteint pas son inf, justifiez.

(b) La fonction est-elle bornée supérieurement ? Si oui fournissez $h^* = \sup h(x)$ et indiquez si h atteint son sup en fournissant x^* tel que $h(x^*) = \max h(x)$. Si vous répondez qu'elle n'est pas bornée ou encore n'atteint pas son sup, justifiez.

(c) Calculez tous les points stationnaires de chaque fonction. Il n'est pas difficile de se convaincre que h_2 possède les mêmes points stationnaires que h_1 qui en possède deux et h_3 trois.

(d) Caractérisez les points stationnaires en (c) (min locaux, max locaux, indéterminés).

3. *[Algorithmes scalaires* — $5 \times 5 = 25$ *points]*
Considérons la fonction h_1 ci haut.

(a) Puisque $h(1) < 0$, justifiez qu'il existe un minimum local dans l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$.

(b) Appliquez l'algorithme de Fibonacci pour réduire l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$ à un intervalle de longueur $\leq \frac{1}{3}$.

(c) Effectuez *une* itération de Newton à partir de $\theta = 0$; cette itération se rapproche-t-elle du minimum local dans l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$?

(d) Effectuez *une* itération de Newton à partir de $\theta = \frac{3}{2}$; cette itération se rapproche-t-elle du minimum local dans l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$?

(e) Vérifiez qu'en appliquant l'algorithme bissection–Newton (algorithme 1.4 des notes que vous avez codé dans le devoir 1) (avec $\gamma = 0.9$) à partir de l'intervalle $[\theta_1 = 0, \theta_0 = \frac{3}{2}]$ (on tente une itération de Newton à partir de $\theta_1 = 0$), on passe à la méthode de Newton après seulement une utilisation de la bissection.

4. *[Orthogonalité et optimalité — $4 \times 5 = 20$ points]* Ces exercices explorent les relations d'orthogonalité reliées aux notions d'optimalité.
   (a) Considérez une droite paramétrique de $\mathbb{R}^n$, $x(\theta) = o + \theta d$ ainsi qu'une cible x_0. Exprimez le problème d'identifier le point de la droite le plus proche de x_0 comme un problème de minimisation. Obtenez l'expression de la solution θ^* et vérifiez que $(x(\theta^*) - x_0) \perp d$.
   (b) Considérez maintenant un plan paramétrique de $\mathbb{R}^n$, $x(\theta) = o + \theta_1 d_1 + \theta_2 d_2$. En constituant la matrice $D = [d_1 d_2]$ et le vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2)^t$ exprimez le problème d'identifier le point du plan le plus proche de x_0 comme un problème de minimisation. Obtenez l'expression de la solution $\theta^* \in \mathbb{R}^2$ et vérifiez que $(x(\theta^*) - x_0) \perp d_1$ et $(x(\theta^*) - x_0) \perp d_2$.
   (c) Rappelons que l'algorithme du gradient conjugué linéaire est décrit par les équations :

$$\begin{aligned} d_k &= -\nabla q(x_k)^t + \beta_{k-1} d_{k-1} \\ \theta_k &= \frac{-\nabla q(x_k) d_k}{d_k^t Q d_k} \\ x_{k+1} &= x_k + \theta_k d_k \\ \beta_k &= \frac{\nabla q(x_{k+1}) Q d_k}{d_k^t Q d_k}. \end{aligned}$$

   Démontrez que $\nabla q(x_{k+1}) \perp d_k$.
   (d) Dans l'algorithme du gradient conjugué, on peut montrer que $\nabla q(x_{k+1}) \perp \nabla q(x_k)$. Utilisez cette propriété (sans la démontrer, prenez-la pour acquis) pour montrer que les formules suivantes pour θ_k et β_k sont équivalentes aux précédentes.

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\|\nabla q(x_k)\|^2}{d_k^t Q d_k} \\ \beta_k &= \frac{\|\nabla q(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla q(x_k)\|^2}. \end{aligned}$$

   Observez que $\theta_k Q d_k = Q x_{k+1} - Q x_k = \nabla q(x_{k+1})^t - \nabla q(x_k)^t$. On remarque que la formule résultante pour β_k n'utilise plus explicitement la matrice Q, mais seulement ∇q.

5. *[Optimisation dans $\mathbb{R}^n$ — $8 \times 5 = 40$ points]* La fonction de Rosenbrock est fameuse pour les tests de méthodes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$. La version originale de cette fonction pour $n = 2$ est la suivante :

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

   Son minimum est en $x = (1, 1)^t$ et le point de départ habituel est $x_0 = (-1,\ 1.2)^t$. $f(x_0) = 8$, $\nabla f(x_0) = (76, 40)$ and $\nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} 722 & 400 \\ 400 & 200 \end{pmatrix}$

(a) Écrivez les expressions de $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$.

(b) Vérifiez que $x^* = (1,\ 1)^t$ est un minimum local satisfaisant aux conditions suffisante d'optimalité.

(c) Vérifiez que $\nabla^2 f(x_0)$ n'est pas définie positive mais qu'elle est inversible.

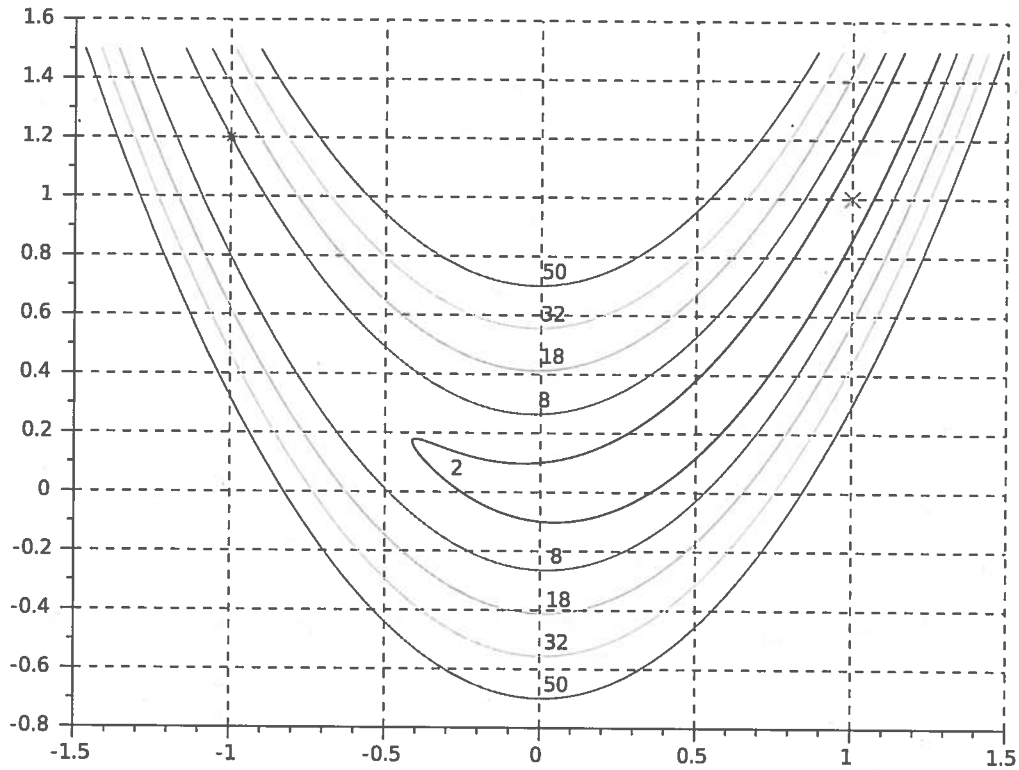
(d) Malgré que $\nabla^2 f(x_0)$ ne soit pas définie positive, il est possible que la direction de Newton (non modifiée) soit tout de même une direction de descente. Vérifiez que la direction de Newton est en effet une direction de descente dans ce cas particulier.

(e) Vérifiez que la direction du gradient, $d = -\nabla f(x_0)$ n'est pas une direction de courbure négative, donc c'est une direction de courbure positive.

(f) Utilisez l'algorithme gradient conjugué pour calculer la direction de Newton modifiée en utilisant le test d'arrêt "courbure_négative". Puisque $-\nabla f(x_0)$ n'est pas une direction de courbure négative et que $\nabla^2 f(x_0) \not\succeq 0$, expliquez pourquoi l'algorithme du gradient conjugué avec le test "courbure_négative" sera interrompu après la première itération.

(g) Quelle sera la différence entre la direction $d = -\nabla f(x_0)$ et le résultat de l'algorithme du gradient conjugué interrompu avec le test d'arrêt "courbure_négative" ?

(h) Vérifiez que le pas de déplacement $\theta = 1$ est admissible pour la direction de Newton modifiée, la direction de Newton non modifiée, mais pas pour la direction $d = -\nabla f(x_0)$. Prenez $\tau_0 = 0.1$ et $\tau_1 = 0.9$.



FIN DE L'EXAMEN