Denis Morency

De:	no-reply@www.usherbrooke.ca
Envoyé:	13 février 2015 09:22
À:	Sciences-CentreImpression@USherbrooke.ca
Objet:	COMMANDE EXAMENS 26 février 13h30
Pièces jointes:	MAT-253-H15.pdf

TYPE-EXAMEN	INTRA
SIGLE-COURS	MAT253
TITRE-COURS	Algèbre linéaire
PROFESSEUR	Ibrahim Assem
DATE-HEURE	jeu 26/02/15, 13h30-15h20
AUTORISE-PAR	Ernest Monga
NOMBRE-PAGES	2
NOMBRE-COPIE-PROF	23
IMPRESSION-QUESTIONNAIRE	Recto broché
NOMBRE-FEUILLES-BLANCHES	
NOMBRE-PAPIER-GRAPHIQUE	
NOMBRE-CAHIERS	25-2
CONSENTEMENT-AGES	1
REMARQUES	
E-MAIL	
FIRST-NAME	
LAST-NAME	
NICK-NAME	
SPAMSHIELD	true

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MAT253
ALGÈBRE LINÉAIRE
Examen périodique
Trimestre d'hiver 2015

Date: jeudi 26 février 2015 — Professeur: Ibrahim Assem

Heure: de 13h30 à 15h20 — Local: D3-2035

Notes: - Répondez à toutes les questions en justifiant pleinement vos réponses.
- Le barème est indiqué entre crochets.
- Ni notes, ni calculatrice permises.

Question 1 [5]

On considère les deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par:

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Donner une base et la dimension de chacun de $F, G, F+G$ et $F \cap G$.

Question 2 [8]

(a) Prouver que trois vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ d'un espace vectoriel E sont libres si et seulement si $\{e_2, e_3\}$ le sont et $e_1 \notin \langle e_2, e_3 \rangle$.

(b) Prouver que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{Q}^3$ sont liés si et seulement si $a = 2$. Dans ce cas, trouver une relation de dépendance linéaire entre eux.

Question 3 [8]

(a) Soit v_1, v_2, v_3 trois vecteurs dans un espace de dimension 3. Prouver que

$$\det(2v_1 + v_2 + v_3, 2v_2 + v_3 + v_1, 2v_3 + v_1 + v_2) = 4\det(v_1, v_2, v_3).$$

(b) Au moyen des propriétés élémentaires des déterminants, prouver que:

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a+b+2x)(a+b-2x)(a-b)^2.$$

Question 4 [9]

(a) Soit E un espace vectoriel, et $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que $x \in E$ est un vecteur propre correspondant à la fois aux deux valeurs propres λ, μ. Prouver que $\lambda = \mu$.

(b) On considère l'application $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ définie par:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que f est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Vérifier que $f^2 = 4f$.
3. Donner une base de chacun de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$.
4. Diagonaliser f, si cela est possible.
5. En déduire que $\mathbb{Q}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

MERCI