

Introduction au calcul scientifique (PHQ202)

Examen final

27 avril 2016

Directives : Cet examen dure 2 heures. Répondez à toutes les questions (total : 30 points, comptant pour 30% de la note finale). Aucune documentation n'est permise. Le nombre de points alloués à chaque problème est indiqué.

Question 1 Équations différentielles [9 points]

On désire étudier numériquement le mouvement d'un pendule simple, déterminé par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = \cos(t)$$

où θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale et ω la fréquence des petites oscillations, qu'on peut poser égale à l'unité mais qui doit rester ajustable.

Écrivez un script en Python afin de produire un tableau `theta` des valeurs de θ entre le temps $t = 0$ et un temps final à déterminer t_f , avec un pas temporel h . Les conditions initiales peuvent être quelconques.

Vous devez utiliser la fonction suivante, utilisée pour résoudre des systèmes de N équations différentielles couplées du premier ordre :

```
y = scipy.integrate.odeint(func, y0, t)
```

où

- `y` : tableau de forme `len(t) × len(y0)` donnant la solution à l'équation différentielle.
- `t` : tableau des valeurs du temps pour lesquelles l'équation différentielle est résolue.
- `y0` : valeur initiale des N variables.
- `dy = func(y, t0)` est une fonction qui retourne la dérivée `dy` du vecteur `y` par rapport au temps, évaluée au temps `t0`.

Notes :

1. Vous devez bien sûr définir la fonction `func` de manière appropriée au problème.
2. Votre solution devrait pouvoir s'exécuter si vous disposiez d'un interpréteur Python. Il doit donc comporter l'importation des bibliothèques, etc.
3. On ne vous demande pas un programme qui produit un graphique, mais un tableau ; celui-ci pourrait être éventuellement écrit sur fichier ou porté en graphique, mais vous n'avez pas à vous occuper de cet aspect.

Question 2 Fonction d'une matrice [9 points]

A est une matrice symétrique d'ordre N définie ainsi : $A_{ij} = |i - j|$, où i et j vont de 1 à N. Définissez une fonction `sinA(t)` en Python qui retourne la fonction $\sin(At)$. Expliquez bien votre démarche.

Indices :

- ◆ Une fonction $f(A)$ d'une matrice A se définit en fonction des vecteurs et valeurs propres de la manière suivante : $f(A) = Uf(D)U^T$, où U est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A et D est la matrice diagonale composée des valeurs propres de A.
- ◆ Vous devez utiliser la fonction suivante, qui retourne les valeurs propres `evalues` et les vecteurs propres `evector`s de A :

```
evalues, evector = scipy.linalg.eig(A)
```

Les vecteurs propres forment les colonnes de la matrice `evector`s.
- ◆ La fonction `numpy.diagflat(x)` crée une matrice diagonale, où x est un tableau unidimensionnel qui contient la diagonale.

Question 3 Code Python efficace [4 points]

Récrivez les extraits de code Python suivants de manière plus concise.

A

```
for i in range(N):
    for j in range(N):
        A[i,j] = numpy.sin(j*cst)
```

B

```
for i in range(len(A)):
    B[i] = f(A[i])
```

Question 4 C++ [8 points]

Écrivez un code C++ qui effectue la tâche suivante :

- Il demande à l'utilisateur d'inscrire un entier positif $N \leq 100$. Le programme doit vérifier que cet entier est bel et bien compris de 1 à 100.
- Il imprime à l'écran toutes les valeurs de la factorielle pour les entiers de 1 à N. Les valeurs de la factorielle doivent être considérées comme des `double` et non des `int`.
- Chaque valeur doit apparaître à l'écran sur sa propre ligne.

Il s'agit exactement d'un des problèmes donnés en travaux dirigés le 15 avril dernier.