Denis Morency

De:	no-reply@www.usherbrooke.ca
Envoyé:	7 avril 2015 09:22
À:	Sciences-CentreImpression@USherbrooke.ca
Objet:	COMMANDE EXAMENS
Pièces jointes:	541-H2015Fin.pdf

TYPE-EXAMEN	FINAL
SIGLE-COURS	MAT541
TITRE-COURS	Modules et matrices
PROFESSEUR	Ibrahim Assem
DATE-HEURE	Mercredi 22 avril 2015, 13h30 à 16h30
AUTORISE-PAR	Ernest Monga, directeur du département
NOMBRE-PAGES	2
NOMBRE-COPIE-PROF	7
IMPRESSION-QUESTIONNAIRE	Recto broché
NOMBRE-FEUILLES-BLANCHES	
NOMBRE-PAPIER-GRAPHIQUE	
NOMBRE-CAHIERS	7 cahiers
POSSESSION-VEILLE	1
CONSENTEMENT-AGES	1
REMARQUES	
E-MAIL	
FIRST-NAME	
LAST-NAME	
NICK-NAME	
SPAMSHIELD	true

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MAT541
MODULES ET MATRICES

Examen final
Trimestre d'hiver 2015

Date: mercredi 22 avril 2015 Professeur: Ibrahim Assem
Heure: de 13h30 à 16h30 Local: D3-2029

Notes: - Répondez à toutes les questions en justifiant pleinement vos réponses.
- Le barème est indiqué entre crochets.
- Ni notes, ni calculatrice permises.

Question 1 [6]

(a) Donner une liste de tous les groupes abéliens deux à deux non isomorphes d'ordre 72, en donnant les facteurs invariants de chaque.

(b) Pour le $\mathbb{R}[x]$ – module $M = \mathbb{R}[x] / \langle (x^2-4)^2 \rangle$, trouver la décomposition primaire et dessiner le treillis de sous-modules de M.

Question 2 [9]

(a) On donne un groupe abélien G par générateurs et relations

$$G = \langle x,y : 3x+15y=0, -6x-9y=0, -3x+6y=0 \rangle$$

Trouver la décomposition primaire et celle du théorème fondamental pour G.

(b) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f : E \to E$ une application linéaire non nulle telle que $f^2 = id_E$. Posons $E_+ = \{x \in E : f(x) = x\}$ et $E_- = \{x \in E : f(x) = -x\}$. Vérifier que E_+ et E_- sont des sous-espaces de E et que l'on a $E = E_+ \oplus E_-$.

Question 3 [13]

(a) Soit A une 4x4-matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = (x+1)^3(x-3)$. Trouver toutes les suites de facteurs invariants possibles et en déduire toutes les formes de Jordan possibles pour A.

(b) Soit A un anneau arbitraire, M un A –module et L, N deux sous-modules de M. Montrer que:

1. La règle $f : x + L \cap N \mapsto (x + L, x + N)$ (pour $x \in M$) définit sans ambiguïté une application linéaire $f : M/(L \cap N) \to M/L \times M/N$.
2. Cette application est toujours injective.
3. Cette application est surjective si et seulement si $M = L + N$.

Question 4 [10]

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f : E \to E$ une application linéaire de matrice $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f. En déduire la forme rationnelle canonique et la forme de Jordan de f.

(b) Montrer que E est un $\mathbb{R}[x]$ – module cyclique.

(c) Trouver un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\{v, f(v)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

(d) Trouver la matrice de f dans la base calculée en (c).

Question 5 [12]

Soit $E = \mathbb{C}^3$ muni de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $f : E \to E$ l'application linéaire définie par:

$$f(e_1) = e_1 - e_2 - e_3$$
$$f(e_2) = -e_1 - 2e_3$$
$$f(e_3) = e_1 + e_2 + 3e_3.$$

On note A la matrice de f dans la base considérée et I la matrice identité.

(a) Soit x une indéterminée. Trouver la forme de Smith de la matrice $xI - A$.

(b) Au moyen de (a) (ou autrement) calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f. En déduire la forme de Jordan J de A.

(c) Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP = J$.

MERCI ET BON ÉTÉ!