Denis Morency

De:	no-reply@www.usherbrooke.ca
Envoyé:	7 avril 2015 09:12
À:	Sciences-CentreImpression@USherbrooke.ca
Objet:	COMMANDE EXAMENS
Pièces jointes:	253-H2015FinBis.pdf

TYPE-EXAMEN	FINAL
SIGLE-COURS	MAT253
TITRE-COURS	Algèbre linéaire
PROFESSEUR	Ibrahim Assem
DATE-HEURE	Mardi 14 avril 2015, de 13h30 à 16h30
AUTORISE-PAR	Ernest Monga, directeur du département
NOMBRE-PAGES	2
NOMBRE-COPIE-PROF	24
IMPRESSION-QUESTIONNAIRE	Recto broché
NOMBRE-FEUILLES-BLANCHES	
NOMBRE-PAPIER-GRAPHIQUE	
NOMBRE-CAHIERS	1 cahier
POSSESSION-VEILLE	1
CONSENTEMENT-AGES	1
REMARQUES	
E-MAIL	
FIRST-NAME	
LAST-NAME	
NICK-NAME	
SPAMSHIELD	true

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MAT253
ALGÈBRE LINÉAIRE

Examen final
Trimestre d'hiver 2014

Date: mardi 14 avril 2014
Heure: de 13h30 à 16h30

Professeur: Ibrahim Assem
Local: D3-2037

Notes: - Répondez à toutes les questions en justifiant pleinement vos réponses.
- Le barème est indiqué entre crochets.
- Ni notes, ni calculatrice permises.
- Dans cet examen, la lettre K désigne un corps, et tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Question 1 [7]

On considère la matrice réelle:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Au moyen du polynôme minimal (ou autrement), prouver que A est diagonalisable si et seulement si $a = 1$. Posant ensuite $a = 1$, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Question 2 [10]

(a) On note I la matrice identité. Soit $A \neq \pm I$ une matrice vérifiant l'équation $A^3 - A^2 - A + I = 0$. Sachant que A est diagonalisable, trouver son polynôme minimal. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, on a $A^{2n} = I$.

(b) Prouver que les vecteurs $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ constituent une base de $\mathbb{C}^3$, puis calculer la base duale.

Question 3 [11]

(a) Soit E un espace vectoriel et $q : E \to K$ une forme quadratique positive. Prouver que l'ensemble $V = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Prouver que la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(m+1)x_2x_3$$

est positive si $m = 0$ et indéfinie sinon. Posant ensuite $m = 0$, donner une base du sous-espace V défini en (a) plus haut.

Question 4 [11]

(a) Soit $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|v\| = 1$. Prouver que l'application $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par:

$$f(x) = x - 2\langle x, v\rangle v$$

(pour $x \in \mathbb{C}^n$) est linéaire et vérifie $f^2 = id$. En déduire les valeurs propres possibles de f. Prouver que, pour une de ces valeurs, les vecteurs propres associés sont orthogonaux à v, et que pour l'autre, ils lui sont colinéaires.

(b) Dans $\mathbb{R}^3$, décomposer le vecteur $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ comme somme d'un vecteur se trouvant dans le plan $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ et d'un vecteur orthogonal à ce plan.

Question 5 [11]

(a) Ramener à ses axes principaux la conique d'équation:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 1.$$

(b) On considère la matrice symétrique:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $P^{-1}AP = D$.

MERCI ET BON ÉTÉ