Mécanique II (PHQ310)

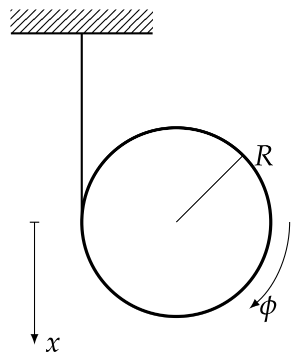
Examen partiel

8 octobre 2015

Directives : *Répondez aux 5 questions (total : 60 points). Aucune documentation permise. Des formules utiles se trouvent à la fin du questionnaire. Prenez soin de bien justifier vos affirmations ; la démarche est aussi importante que la réponse. Le nombre de points alloués à chaque problème ou partie de problème est indiqué entre crochets dans la marge. Cet examen compte pour 30% de votre note finale.*

Problème 1: Le yoyo (18 points)

Un fil de masse négligeable est suspendu verticalement en un point fixe et il est enroulé autour d'un cylindre uniforme de masse m et de rayon R. Quand le cylindre est lâché, il se déplace verticalement vers le bas en tournant pendant que le fil se déroule.



(Problème 1)

[4 pts] a) Écrivez l'énergie cinétique totale du cylindre (translation + rotation) en fonction de la coordonnée généralisée x. Procédez avec l'élimination explicite de la contrainte. Prenez $I = \frac{1}{2}mR^2$ pour le cylindre uniforme.

[2 pts] b) Écrivez l'expression du Lagrangien.

[4 pts] c) Utilisez la transformation de Legendre pour obtenir le Hamiltonien de ce système

[4 pts] d) Utilisez les équations de Hamilton pour obtenir l'équation du mouvement en x. Montrez que le cylindre accélère vers le bas comme $\ddot{x} = 2g/3$.

[4 pts] e) Recommencez le problème en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour extraire la tension dans la corde. Pour ce faire, écrivez la contrainte sur la forme $C(x, \phi) = 0$ et servez-vous du résultat obtenu en d).

Problème 2: Transformation canonique (8 points)

Un système à un degré de liberté est décrit par la coordonnée x et l'impulsion généralisée p. On désire effectuer la transformation suivante :

$$Q(x,p) = \frac{\alpha p}{x} \qquad\qquad P(x,p) = \beta x^2$$

où Q et P sont la nouvelle coordonnée et la nouvelle impulsion, respectivement.

[4 pts] a) Quelle condition les constantes α et β doivent-elles respecter pour que cette transformation soit canonique ?

[4 pts] b) Trouvez une fonction génératrice du type $F_1(x,Q)$ qui permet de générer cette transformation.

Problème 3: Équation de Hamilton-Jacobi pour une force constante (10 points)

Une particule de masse m se déplace en une dimension sous l'influence d'une force constante.

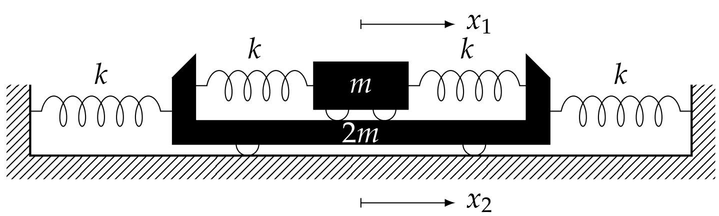
$$V(x) = -fx$$

[3 pts] a) Écrivez le Hamiltonien de ce système en fonction de la coordonnée x et de l'impulsion conjuguée p. Écrivez ensuite l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante.

[7 pts] b) Solutionnez l'équation de Hamilton-Jacobi et obtenez une expression de $x(t,\beta,\alpha)$ et $p(t,\beta,\alpha)$, où $\beta = \partial S/\partial\alpha$ est la nouvelle coordonnée constante et $\alpha = E$ l'énergie de la particule.

Problème 4: Un chariot dans un chariot (18 points)

Considérez le système de la figure suivante. Les chariots roulent sans frottement et leurs positions sont décrites par les coordonnées x_1 et x_2 par rapport au centre de la pièce.



(Problème 4)

[2 pts] a) Écrivez l'allongement de chacun des ressorts en fonction de x_1 et x_2.

[4 pts] b) Écrivez le Lagrangien de ce système en utilisant les coordonnées x_1 et x_2 telles que décrites dans l'énoncé. Écrivez les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ qui décrivent ce système dans la base (x_1, x_2).

[4 pts] c) Écrivez les équations différentielles qui vous permettront d'obtenir les équations du mouvement de ce système. Posez une solution $(x_1(t), x_2(t))$ pour ce système et écrivez l'équation aux valeurs propres. Pour simplifier la solution de ce système vous pouvez poser que $\omega_0^2 = 2k/m$.

[8 pts] d) Solutionnez l'équation aux valeurs propres. Combien de modes propres comporte ce système ? Trouvez les fréquences et décrivez les mouvements relatifs de chacun des chariots dans chacun de ces modes.

Problème 5: Questions de compréhension (6 points)

Répondez dans vos mots aux questions qui suivent.

[3 pts] a) Richard tente de contredire son professeur de physique qui vient de lui apprendre que le nombre de coordonnées généralisées nécessaires pour décrire un système est $3n - k$ où n est le nombre de particules et k, le nombre de contraintes indépendantes. Il utilise l'exemple d'un wagon de montagnes russes qui possède 3 degrés de liberté (x, y et z) avant l'application des contraintes. Richard dit que la position du wagon peut être décrite avec une seule coordonnée généralisée et qu'il y a une seule contrainte sur le wagon (le rail) de la forme $C(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Ces affirmations sont en contradiction avec l'équation $3 - k = 2 \neq 1$. Quelle est l'erreur dans le raisonnement de Richard ? Expliquez.

[3 pts] b) Il existe deux principes qui permettent d'obtenir l'équation de Lagrange. Nommez-en un et décrivez-le brièvement. Il n'est pas nécessaire d'en faire la démonstration.

Formules utiles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathsf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathsf{q}} = 0 \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \quad \text{(petites oscillations)}$$

$$\dot{\mathsf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathsf{p}} \qquad \dot{\mathsf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathsf{q}} \qquad F_1(\mathsf{q}, \mathsf{Q}) \qquad \mathsf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathsf{q}} \qquad \mathsf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathsf{Q}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}\left(\mathsf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathsf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$