FACULTÉ DES SCIENCES

Formulaire pour reprographie d'examen

Le questionnaire d'examen doit parvenir au Centre de reprographie 5 jours ouvrables avant la date de l'examen.

INFORMATIONS POUR LE SECRÉTARIAT DE LA FACULTÉ
(Attacher à chaque questionnaire)

☒ **INTRA**
☐ **FINAL**

Sigle : MAT341

Titre : Nombres et polynômes

Professeur : Ibrahim Assem

Date et heure de l'examen : Jeudi 1er octobre 2015

Nombre de pages : 2

Nombre d'étudiants : 12

☒ **Je désire prendre possession des questionnaires d'examen la veille de l'activité et je me rends responsable de leur mise en sécurité.**

Signature : ______________________

L'étudiant devra répondre

☒ dans un cahier d'examen 14 + 12 = 26

☐ sur le questionnaire

Veuillez inclure

_______ feuilles blanches additionnelles

_______ feuilles de papier graphique

Je consens à ce que deux (2) copies du questionnaire de cet examen soient remises à l'AGES (Association générale des étudiants en sciences) après la fin de la période des examens.

☒ **OUI** ☐ **NON**

Signature : ______________________

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MAT341
NOMBRES ET POLYNÔMES

Examen périodique
Trimestre d'automne 2015

Date: mercredi 1er octobre 2015 | Professeur: Ibrahim Assem
Heure: de 13h30 à 15h20 | Local: D3-2036

Notes: - Répondez à toutes les questions en justifiant pleinement vos réponses.
- Le barème est indiqué entre crochets.
- Ni notes, ni calculatrice permises

Question 1 [6]

(a) Résoudre dans le corps $\mathbb{Z}_{11}$ le système linéaire:

$$\begin{aligned} \bar{2}x + \bar{7}y &= \bar{3} \\ \bar{3}x + \bar{4}z &= \bar{6} \\ \bar{4}x + \bar{7}y + z &= \bar{0}. \end{aligned}$$

(b) Prouver que l'on a $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$.

Question 2 [8]

(a) Soit A un anneau tel que, pour tous $a, b \in A$ on a $ab = -ba$. Prouver que pour tout idéal I de A et pour tous $x, y \in A/I$, on a $xy = -yx$.

(b) On note respectivement $\bar{x}$ et $\tilde{x}$ les classes de l'entier x dans $\mathbb{Z}_{36}$ et $\mathbb{Z}_{12}$ respectivement. Montrer que la règle $\bar{x} \mapsto \tilde{x}$ définit un homomorphisme surjectif d'anneaux $f : \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_{12}$ dont on calculera le noyau.

Question 3 [8]

(a) Soit K un corps commutatif et A un sous-anneau de K. Prouver que A est commutatif et ensuite qu'il est intègre.

(b) Soit A un anneau, B un sous-anneau de A et I un idéal. On rappelle que l'ensemble

$$B + I = \{b + x \, : \, b \in B, x \in I\}$$

est un sous-anneau de A. Prouver que tout élément de $B + I$ s'écrit uniquement sous la forme $b + x$, avec $b \in B, x \in I$ si et seulement si $B \cap I = 0$. Prouver ensuite que, dans ce cas, on a $(B + I)/I \cong B$.

Question 4 [8]

(a) Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, I un idéal de A et $p : A \to A / I$ la projection canonique. Prouver que s'il existe un homomorphisme d'anneaux $\bar{f} : A / I \to B$ tel que $\bar{f}p = f$, alors $I \subseteq \operatorname{Ker} f$.

(b) Prouver que $\mathbb{Z}[x]/\langle x, 4\rangle \cong \mathbb{Z}_4$. En déduire que l'idéal $\langle x, 4\rangle$ n'est ni maximal ni premier dans $\mathbb{Z}[x]$.

MERCI