UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE

IFT 436
Algorithmes et structures de données
EXAMEN PÉRIODIQUE [1]

Le samedi 20 juin 2015 de 9 h 00 à 10 h 50 Professeur : Richard St-Denis

- Toute documentation est permise.
- **Tout appareil électronique, incluant le téléphone cellulaire et l'ordinateur, est interdit.**
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- **Personne ne peut quitter la salle d'examen avant 9 h 15.**
- **Personne ne peut quitter son siège entre 10 h 40 et 10 h 50.**
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le correcteur ;
  - précise, c'est-à-dire exacte ou sans erreur ;
  - complète, c'est-à-dire que toutes les étapes de résolution du problème sont présentes ;
  - concise, c'est-à-dire que la méthode de résolution est la plus courte possible.

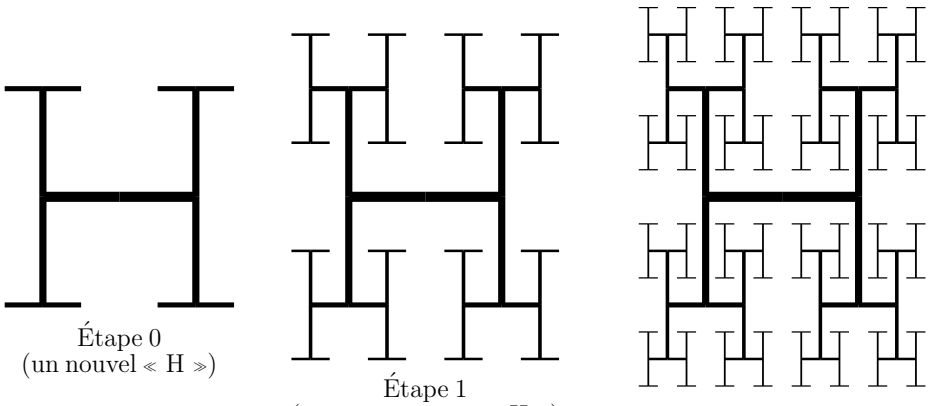
Nom : _____ Prénom : _____

Signature : _____ Matricule : _____

Question		Barème
1		/10
2		/10
3		/15
	total :	/30

1. Ce questionnaire comporte dix (10) pages.

1. (10 points) La figure suivante illustre les trois premières étapes du développement du *H-arbre* qui est nommé ainsi en raison de son motif répétitif qui s'apparente à la lettre « H ». ll est également désigné sous le nom de *H-fractale*[2].



Étape 0
(un nouvel « H »)

Étape 1
(quatre nouveaux « H »)

Étape 2
(16 nouveaux « H »)

a) (2 points) Devinez une solution (formule fermée) pour le nombre de **nouvelles** occurrences de la lettre « H » après la i^e étape du développement de cet objet fractal ($i \geq 0$). Indiquez le raisonnement utilisé.

b) (2 points) Exprimez, à l'aide d'une équation de récurrence, le nombre de **nouvelles** occurrences de la lettre « H » après la i^e étape du développement de cet objet fractal. Donnez aussi la condition initiale. Indiquez le raisonnement utilisé.

2. A. Stacey, www.texample.net/tikz/examples/h-tree/

c) (4 points) Montrez par induction que la solution obtenue en (a) est bien une solution de l'équation de récurrence obtenue en (b).

Base (1 point) :

Hypothèse d'induction (1 point) :

Pas d'induction (2 points) :

d) (2 points) Trouvez une solution (formule fermée) pour le nombre de **total** occurrences de la lettre « H » après la n^e étape du développement de cet objet fractal ($n \geq 0$). Justifiez votre réponse.

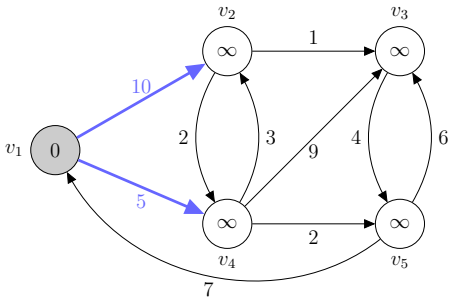
Suggestion : les formules fournies à la dernière page de l'examen pourraient vous être utiles.

2. (10 points) Vous devez déterminer la complexité de calcul de l'algorithme de Dikjstra pour le calcul des plus courts chemins à partir d'un seul sommet source s d'un graphe orienté valué (G, w) représenté par des **listes d'adjacence**. Voici cet algorithme :

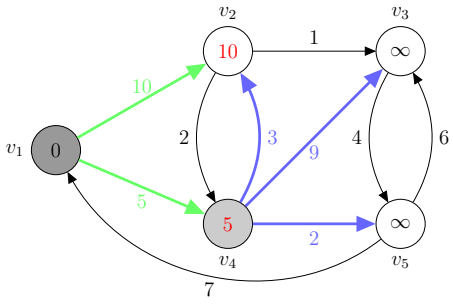
	coût total	nombre de fois	
1.			`procedure` $Dikjstra(G, w, s)$
			$\{s \in V(G)$ est le sommet source$\}$
2.			`for each` $v \in V(G)$ `do`
3.			$d[v] := \infty \qquad \pi[v] :=$ `NIL`
4.			$d[s] := 0 \qquad \{d[v]$ indique la distance de s à $v\}$
5.			$S := \emptyset$
6.			$Q := V(G) \qquad \{Q$ est une file de priorité,$\}$
			$\{$la clé de $v \in V(G)$ est $d[v]\}$
7.			`while` $Q \neq \emptyset$ `do`
8.			$u := Extract\_Min(Q)$
9.			$S := S \cup u$
10.			`for each` $v \in Adj(G)[u]$ `do`
11.			`if` $d[v] > d[u] + w(u, v)$ `then`
12.			$d[v] := d[u] + w(u, v) \qquad \pi[v] := u$

La figure à la page suivante illustre cet algorithme. Dans cette figure, les sommets en blanc sont dans $Q = V(G) - S$, ceux en noir sont dans S et celui en gris est le sommet courant u. Les arcs en bleu sont les arcs incidents au sommet courant u vers l'extérieur, ceux en vert sont les arcs qui correspondent aux pointeurs $\pi[v]$ (mais inversés) pour $v \in S$. Les valeurs en rouge qui étiquettent les sommets représentent des mises à jour de d pour la prochaine étape. Par exemple, à l'étape 4, le sommet courant est v_2 qui a deux arcs incidents vers l'extérieur, (v_2, v_3) et (v_2, v_4) respectivement de poids 1 et 2. Comme $d[v_2] + w(v_2, v_3) = 8 + 1 < 13 = d[v_3]$, la valeur de $d[v_3]$ est mise à jour pour la prochaine étape. Elle devient 9. Comme $d[v_2] + w(v_2, v_4) = 8 + 2 > 5 = d[v_4]$, la valeur de $d[v_4]$ reste inchangée.

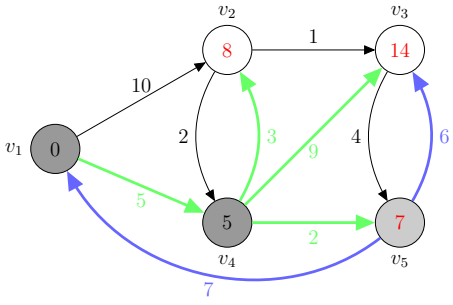
a) (5 points) Pour chaque ligne ou groupe de lignes de l'algorithme de Dikjstra, donnez le nombre de fois que les énoncés sont exécutés et leur coût total. On suppose que la structure de données utilisée pour la file de priorité est un tableau *standard* (sans structure particulière) pour lequel les indices sont les sommets et les valeurs sont les valeurs des poids des sommets (donc le tableau d) accompagnées d'un indicateur qui permet de distinguer les sommets de couleur noir des sommets de couleur blanc. Inscrivez vos réponses à la gauche des énoncés de l'algorithme.



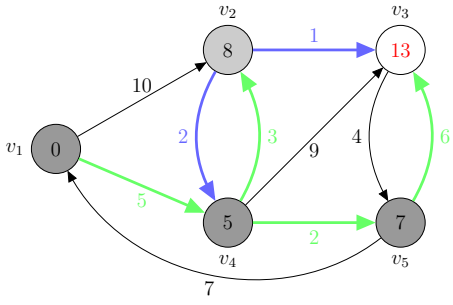
Étape 1



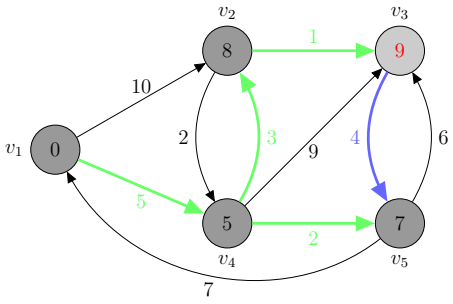
Étape 2



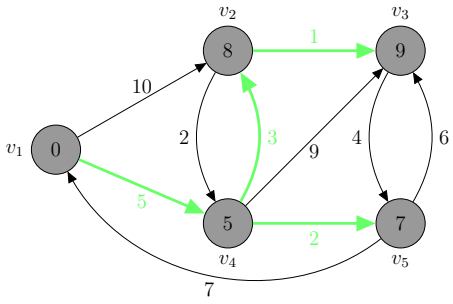
Étape 3



Étape 4



Étape 5



Étape 6

b) (3 points) À partir des réponses obtenues à la question (a), exprimez dans la notation asymptotique la plus appropriée la complexité de calcul de l'algorithme de Dikjstra. Justifiez votre réponse.

c) (1 point) Est-il possible d'améliorer la complexité de calcul de l'algorithme de Dikjstra en utilisant une autre structure de données pour la file de priorité Q ? En quoi cela réduit ou ne réduit pas la complexité de calcul ?

d) (1 point) Quelle stratégie de conception a été utilisée pour concevoir l'algorithme de Dikjstra ? Justifiez votre réponse.

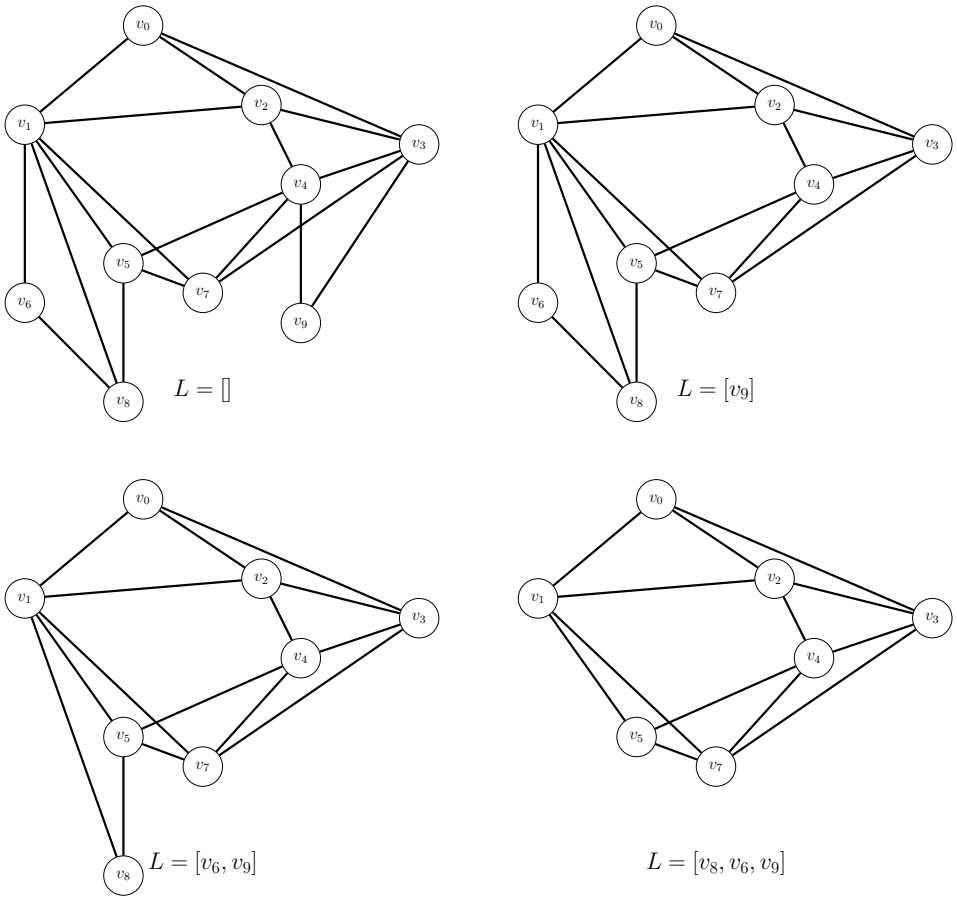
3. (15 points) Vous devez concevoir un algorithme pour le coloriage d'un graphe avec un nombre raisonnable, mais pas nécessairement minimale, de couleurs. Il ne s'agit PAS ici de trouver le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, mais de traduire l'heuristique décrite ci-dessous en pseudocode tout en utilisant des structures de données appropriées. En particulier le graphe non orienté G est représenté sous la forme d'une **matrice d'adjacence** $n \times n$, où $n = v(G)$ est le nombre de sommets de G. Le nombre d'arêtes de G est $e(G) = m$. Il est permis d'ajouter des données à la matrice d'adjacence, soit dans ces éléments $A(G)_{ij}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$), soit par l'ajout d'une rangée ou colonne. Par exemple, vous pouvez ajouter une rangée (dont l'indice est 0) qui contient le degré de chaque sommet positionné à la lecture de la matrice. Il peut en être de même pour l'ajout d'une colonne (dont l'indice est 0).

   Rappelons que le coloriage d'un graphe $G = (V, G)$ consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de telle sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.

L'heuristique est la suivante :

(a) Élimination un à un des sommets du graphe (incluant les arêtes incidentes au sommet éliminé) en choisissant à chaque étape un sommet de plus petit degré ;

(b) Ajout un à un des sommets dans le graphe (incluant les arêtes incidentes au sommet dans le graphe original), selon l'ordre inverse par rapport à l'ordre utilisé dans la première partie de l'heuristique, en lui attribuant une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.



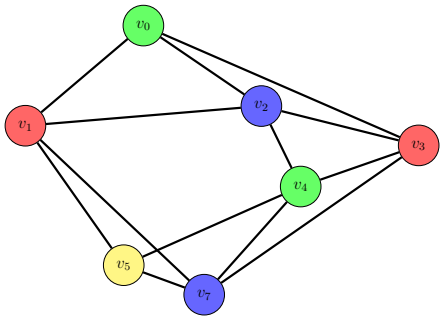
$$L = [v_0, v_3, v_2, v_4, v_1, v_7, v_5, v_8, v_6, v_9]$$

La figure ci-dessus illustre les trois premières étapes de la première partie de l'heuristique. On remarque à la première étape que le sommet choisi est v_9, car $deg(v_9) = 2$, qui est un sommet ayant plus petit degré. Le sommet v_6 aurait pu également être choisi, ce qui est fait à la deuxième étape. À la troisième étape, le sommet choisi est v_8, car

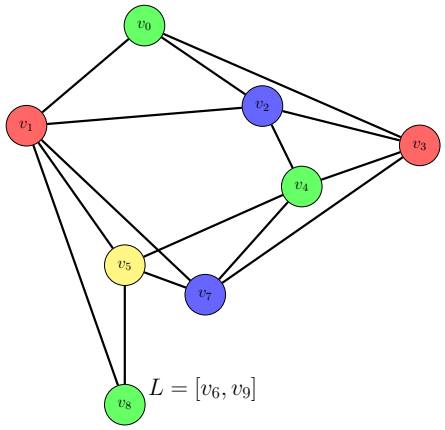
$deg(v_8) = 2$. À la fin de la première partie de l'algorithme, on obtient la liste ordonnée suivante :

$$L = [v_0, v_3, v_2, v_4, v_1, v_7, v_5, v_8, v_6, v_9].$$

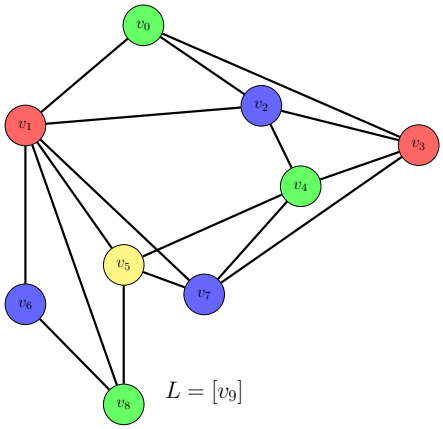
La figure ci-dessous illustre les trois dernières étapes de la deuxième partie de l'heuristique. On remarque que le sommet v_8 est retiré de la liste L et que la couleur vert lui a été attribué, car ses deux sommets adjacents, v_1 et v_5, ont respectivement la couleur rouge et jaune. La couleur bleu aurait pu également lui être attribuée. Cette partie se termine lorsque la liste L est vide.



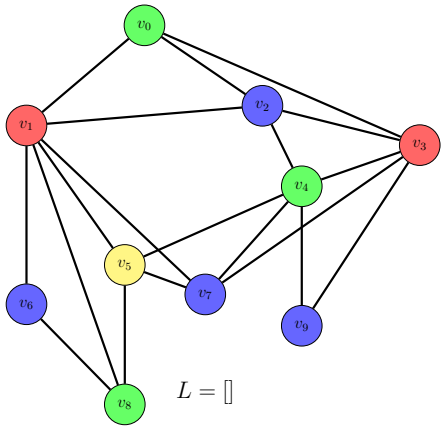
$L = [v_8, v_6, v_9]$



$L = [v_6, v_9]$



$L = [v_9]$



$L = []$

a) (2 points) Quelles structures de données utilisez-vous dans votre algorithme ?

b) (5 points) Donnez le **pseudocode commenté** de votre algorithme qui correspond à la première partie de l'heuristique. Une réponse écrite dans un langage de programmation vaut zéro.

c) (6 points) Donnez le **pseudocode commenté** de votre algorithme qui correspond à la deuxième partie de l'heuristique. Une réponse écrite dans un langage de programmation vaut zéro.

d) (2 points) Quelle stratégie de conception avez-vous utilisée pour concevoir votre algorithme ? Justifiez votre réponse.

FIN DE L'EXAMEN

Série géométrique ou exponentielle, cas fini :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ si } x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 1.$$

Série géométrique ou exponentielle, cas infini :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \text{ si } |x| < 1 \text{ (série décroissante).}$$

Dérivée de la série précédente et multiplication par x :

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1 - x)^2} \text{ si } |x| < 1.$$

Série arithmétique et géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd)r^k = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} + \frac{rd(1 - nr^{n-1} + (n - 1)r^n)}{(1 - r)^2}$$