Mécanique II (PHQ310)

Examen final

9 décembre 2015

Directives : *Répondez aux 5 questions (total : 80 points). Aucune documentation permise. Des formules utiles se trouvent à la fin du questionnaire. Prenez soin de bien justifier vos affirmations ; la démarche est aussi importante que la réponse. Le nombre de points alloués à chaque problème ou partie de problème est indiqué entre crochets dans la marge. Cet examen compte pour 45% de votre note finale.*

Problème 1: Tenseur d'inertie (16 points)

Le tenseur d'inertie permet d'exprimer le moment cinétique d'un corps rigide tournant autour d'un axe $\hat{\mathbf{n}}$ avec une vitesse angulaire ω.

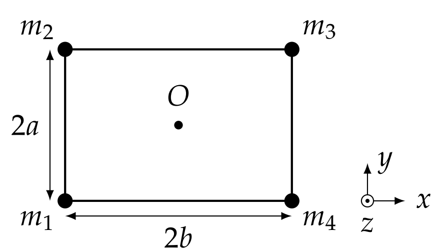
$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\, \hat{\mathbf{n}}$$

[6 pts] a) En utilisant la définition du moment cinétique pour une particule, montrez que les éléments du tenseur d'inertie sont donnés par

$$I_{ij} = \sum_a m_a \left(\mathbf{x}_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj} \right) .$$

[3 pts] b) Expliquez en vos mots ce que sont les axes principaux d'un corps rigide. Comment fait-on pour les obtenir ?

[5 pts] c) Calculez le tenseur d'inertie pour un groupe de 4 masses différentes positionnées sur les coins d'un rectangle de côtés $2a$ et $2b$. Utilisez le point O, qui se trouve dans le même plan que le rectangle, comme centre de rotation.



(Problème 1)

[2 pts] d) Quelle condition les masses doivent-elles remplir pour que les axes principaux soient parallèles aux côtés du rectangle ?

Problème 2: Toupie symétrique (20 points)

On s'intéresse au mouvement d'une toupie symétrique avec les moments d'inertie I_1, I_1 et I_3.

[3 pts] a) À l'aide de schémas, définissez les trois angles d'Euler ϕ, θ et ψ.

[5 pts] b) On a vu que le Lagrangien d'une toupie symétrique peut être exprimé grâce aux angles d'Euler.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - mgh \cos \theta$$

À partir de celui-ci obtenez les moments conjugués p_ϕ, p_θ et p_ψ. Identifiez lesquels sont conservés et pourquoi.

[3 pts] c) Utilisez l'équation de Lagrange en θ pour obtenir l'équation différentielle suivante. Identifiez et donnez la signification de ω_3.

$$I_1\ddot{\theta} = I_1 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - I_3\omega_3\,\dot{\phi}\,\sin\theta + mgh\sin\theta$$

[3 pts] d) À l'aide de l'équation précédente, montrez que pour un mouvement de précession uniforme la fréquence précession est approximativement

$$\frac{mgh}{I_3\omega_3}$$

lorsque ω_3 est grand. Spécifiez ce que l'on entend par ω_3 grand ; par rapport à quelle quantité est-ce qu'on le compare ?

[3 pts] e) Utilisez le Hamiltonien de la toupie pour expliquer en quoi le problème de la toupie se résume à un problème unidimensionnel dans un potentiel effectif. Identifiez ce potentiel.

$$\mathcal{H} = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{\left(p_\phi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgh\cos\theta$$

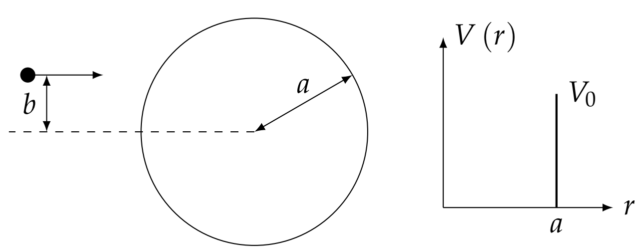
[3 pts] f) Supposons que ce potentiel comporte un minium. À l'aide d'un schéma de ce potentiel, décrivez ce qu'est un mouvement de nutation.

Problème 3: Diffusion par une coquille vide (12 points)

Une sphère vide (ou coquille) de rayon a dont la paroi est infiniment mince peut être représentée par un potentiel central de la forme suivante.

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{si } r = a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On considère un flux de particules d'énergie $E > V_0$ incidentes sur cette sphère et l'on définit $\gamma^2 \equiv 1 - V_0/E$.



(Problème 3)

[2 pts] a) Vous avez montré dans votre devoir que les particules, avec un paramètre d'impact $b > \gamma a$, incidentes sur une sphère molle de rayon a sont réfléchies à sa surface. On observe le même phénomène pour une sphère vide. Qu'arrive-t-il aux particules incidentes sur une sphère vide avec un paramètre d'impact $b < \gamma a$? (Aucun calcul n'est requis.)

[4 pts] b) Obtenez l'angle de diffusion θ en fonction du paramètre d'impact b pour les particules ayant

$b > \gamma a$. Montrez qu'il y a un angle θ_0 au-delà duquel aucune particule n'est diffusée. Faites un schéma de θ en fonction de b sur le domaine $[0, a]$.

[4 pts] c) Obtenez l'expression de la section différentielle et calculez la section efficace d'une coquille. Exprimez votre résultat final en fonction de V_0 et E.

[2 pts] d) Cette relation est valide uniquement pour $E \geq V_0$. Comment se comporte la section efficace dans les situations où $E < V_0$ et $E \gg V_0$?

Problème 4: Oscillateur relativiste : solution perturbative (16 points)

Nous avons vu en classe qu'une particule relativiste dans un potentiel harmonique ($\frac{1}{2}kx^2$) oscille à une fréquence légèrement différente de celle d'une particule classique. Ce numéro vise à obtenir le même résultat en utilisant la théorie des perturbations et la méthode de Hamilton-Jacobi.

[1 pt] a) Écrivez le Hamiltonien pour une particule relativiste dans un potentiel harmonique.

[6 pts] b) Utilisez un développement en série de Taylor qui permet d'écrire ce Hamiltonien comme la somme du Hamiltonien d'un oscillateur harmonique classique et d'un Hamiltonien perturbatif.

$$\mathcal{H} \approx H_0 + H_1$$

[4 pts] c) Basez-vous sur la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi de l'oscillateur harmonique pour exprimer la perturbation en fonction de β et α. Calculez la perturbation moyenne sur une période d'oscillation.

[5 pts] d) Calculez le taux de variation moyen de β. Reliez ce taux de variation au changement de la fréquence d'oscillation de l'oscillateur relativiste par rapport à l'oscillateur classique.

Problème 5: Particule relativiste accéllerée (16 points)

Si l'on applique une force constante $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{x}}$ sur une particule en mécanique classique, son accélération est constante, ce qui lui permettrait d'atteindre une vitesse infinie. La relativité restreinte ne permet pas de dépasser la vitesse de la lumière c.

[3 pts] a) Écrivez le Lagrangien d'une particule classique soumise à une force constante. Utilisez l'équation de Lagrange pour obtenir l'équation du mouvement de la position de la particule. Utilisez les conditions initiales d'une particule au repos.

[5 pts] b) Refaites le même problème pour une particule relativiste. (Indice : Ne faites pas la dérivée par rapport au temps, mais utilisez le fait que $\partial\mathcal{L}/\partial x =$ cte.) Utilisez les conditions initiales

$$\dot{x}\,(t = 0) = 0 \qquad\qquad x\,(t = 0) = A$$

Montrez alors que la trajectoire d'une particule relativiste respecte une équation de la forme

$$x^2 - c^2t^2 = A^2$$

où A est une constante à déterminer.

[3 pts] c) Comparez les équations du mouvement pour les particules classique et relativiste. En quoi la seconde implique-t-elle que la vitesse maximale atteinte par une particule ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière c ? En quoi la première échoue-t-elle ?

[5 pts] d) En utilisant la transformation de Lorentz, exprimez cette trajectoire dans un autre référentiel $\mathcal{S}'$ qui se déplace par rapport au premier $\mathcal{S}$ selon $\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\mathbf{x}}$. Comparez la forme de la trajectoire dans les deux référentiels.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{S}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathsf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathsf{q}} = 0$$

$$\dot{\mathsf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathsf{p}} \qquad \dot{\mathsf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathsf{q}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$$

$$\mathcal{L}_{\text{relativiste}} = -mc^2\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2} - V\left(x\right)$$

$$\mathcal{H}_{\text{relativiste}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + V\left(x\right)$$

$$\mathcal{H}\left(\mathsf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathsf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$

$$x\left(\beta, \alpha, t\right) = \left(\frac{2\alpha}{m\omega^2}\right)^{1/2}\cos\left(\omega\left(t + \beta\right)\right)$$
$$p\left(\beta, \alpha, t\right) = \left(2m\alpha\right)^{1/2}\sin\left(\omega\left(t + \beta\right)\right)$$

$$\mathbf{A} \times \left(\mathbf{B} \times \mathbf{C}\right) = \mathbf{B}\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}\right) - \mathbf{C}\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

$$\int_0^{y_0} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{a^2 + y_0^2} - a$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$