UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MAT 141 – Éléments d'algèbre

Examen final
Trimestre d'automne 2015

Date : le mercredi 9 décembre 2015 — Professeur : Thomas Brüstle
Heure : 9h00 à 12h00 — Local : D3 - 2041

Notes :	Une feuille de notes recto verso et une calculatrice non-programmable sont permises. Le barème est inscrit entre crochets.

Question 1 [10 points]
Soit G le groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}_{11})_*$

(a) Prouver que G est cyclique en en donnant un générateur.
(b) Montrer que, si $x \in G, x \neq \overline{1}$, alors l'ordre de x est 2,5 ou 10.
(c) Soit H le sous-groupe de G engendré par $\overline{10}$. Trouver toutes les classes à droite de G modulo H, puis dresser la table du groupe G/H.
(d) Prouver que G/H est cyclique en en donnant un générateur.

Question 2 [10 points]

(a) Soient G un groupe d'ordre 55 et H un sous-groupe normal d'ordre 5. Montrer que G/H est cyclique.
(b) Calculer l'ordre de l'élément $\overline{15} + \langle\overline{27}\rangle$ dans $\mathbb{Z}_{54}/\langle\overline{27}\rangle$.

Question 3 [12 points]

(a) Soit H et K deux sous-groupes normaux d'un groupe L. Montrer que HK est un sous-groupe de L et qu'il est normal dans L.
(b) Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes surjectif et N un sous-groupe normal de G. Montrer que $f(N) = \{f(x) \mid x \in N\}$ est normal dans G'.

(c) Donner un exemple d'un homomorphisme $f : G \to G'$ et d'un sous-groupe N de G tels que $N \trianglelefteq G$, mais $f(N) \ntrianglelefteq G'$.

Question 4 [12 points]
On définit $f : \mathbb{Z}_{12} \to D_3$ par $f(\overline{k}) = \rho^k$.

(a) Montrer que f est correctement définie.
(b) Montrer que f est un homomorphisme.
(c) Calculer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
(d) En déduire que $\mathbb{Z}_{12}/3\mathbb{Z}_{12} \simeq \mathbb{Z}_3$.

Question 5 [6 points]
(a) Énoncer le théorème de Burnside.
(b) On considère l'action d'un groupe fini G sur un ensemble E de cardinalité $|E| > 1$. Montrer que, si le nombre d'orbites est 1, alors il existe un élément $g \in G$ sans points fixes, c'est-à-dire $E_g = \emptyset$.

MERCI ET JOYEUX NOËL !